Universidade Federal de Lavras

Departamento de Ciências Exatas

Prof. Daniel Furtado Ferreira

6.1ª Lista de Exercícios Práticos   Variáveis Aleatórias e Distribuição de Probabilidades

1) Considere um experimento que consiste em lançar dois dados equilibrados e registrar seus resultados em relação as faces que estavam para cima após o lançamento. Admite-se que os resultados sejam perfeitos em todos os lançamentos, ou seja, não existe a possibilidade de o dado lançado cair em um posição em que uma das suas seis faces não fique evidentemente voltada para cima. Vamos definir a seguinte variável aleatória: i) X: soma dos resultados das faces. Pergunta-se:

   a) Qual é o conjunto suporte da variável aleatória X?
   b) Qual é a distribuição de probabilidade de X?
   c) A variável aleatória X é discreta ou contínua?
   d) Determinar as seguintes probabilidades:
      i) $P(X \leq 8)$
      ii) $P(X \geq 5)$
      iii) $P(X > 5)$

2) Marcar como verdadeira ou falsa as seguintes afirmativas:

   a) ( ) Uma variável aleatória X é uma função do espaço amostral Ω, tal que $X(\omega) = x$, em que $x \in \mathbb{R}$.
   b) ( ) o valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $x = X(\omega)$ é a imagem da variável aleatória X.
   c) ( ) O conjunto imagem de X é chamado de conjunto suporte de X, S_X, e representa um subconjunto dos reais de todos os possíveis valores da função $X(\omega)$ aplicada ao espaço amostral Ω.
   d) ( ) São eventos equivalentes dois eventos em espaços amostrais diferentes que quando um ocorre o outro não ocorre simultaneamente.
   e) ( ) Se o conjunto suporte de X, S_X, for um conjunto contável, a variável aleatória é contínua.
   f) ( ) Se o conjunto suporte de X, S_X, for um conjunto contável, a variável aleatória é discreta.
   g) ( ) Se $\sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x) = 1$, a variável aleatória X é discreta.
   h) ( ) Se $\sum_{x\in\mathbb{R}} p_X(x) = 1$, a variável aleatória X é contínua.

3) Sendo X uma variável aleatória binomial, com $\theta = 0{,}5$ e $n = 4$, obter:

   a) A distribuição de probabilidade de X.
   b) $P(X \leq 2)$.
   c) $P(X < 2)$
   d) Valor esperado de X.
   e) Valor esperado de X^2.

4) Se definirmos uma variável aleatória como sendo igual ao número de repetições de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso constante θ, $0 < \theta < 1$, até a ocorrência do primeiro sucesso, pergunta-se: a) qual é a função de probabilidade deste modelo probabilístico? Observar que esta é uma das formas alternativas de representar um variável aleatória geométrica; b) qual é o conjunto suporte S_X desta variável? c) esta variável é discreta ou contínua? d) mostrar que $\sum_{x\in S_X} p_X(x) = 1$.

5) Dê exemplos de situações em que o modelo Poisson possa ser usado.

6) Consideremos uma variável aleatória X com suporte $S_X = [0{,}1]$. a) Verificar se $f_X(x) = 2x$, para $x \in [0{,}1]$ e $f_X(x) = 0$ para $x \notin [0{,}1]$ é uma função densidade de probabilidade. b) Determinar as esperanças de X e de X^2. c) Determinar a função de distribuição de probabilidade de X, $F_X(x)$. d) Calcular a probabilidade: $P(0{,}2 < X \leq 0{,}5)$. e) A variável aleatória X é contínua ou discreta?

7) Suponha que $F_X(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$, então compute as seguintes probabilidades:

   a) $P(X < 3)$
   b) $P(1/4 < X < 1/2)$
   c) $P(2/5 < X < 4/5)$
   d) $P(X < 0)$
   e) $P(X < 1)$
   f) $P(X \leq -3)$

8) Responda e justifique suas respostas:

a) Diferenciar variáveis aleatórias discretas de variáveis aleatórias contínuas.

b) Diferenciar função de probabilidade de função densidade de probabilidade.

c) Por que $P(X = x) = 0$, se X é uma variável aleatória contínua?

d) Se $P(X = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$, podemos caracterizar a variável aleatória como contínua?

e) Se X assume apenas dois valores, digamos $S_X = \{0{,}25,\ 2{,}34\}$, com probabilidades $P(X = 0{,}25) = 1 - \theta$ e $P(X = 2{,}34) = \theta$, para $0 < \theta < 1$, podemos dizer que X é discreta?

Resolução

1) Para o experimento aleatório do lançamento de dois dados equilibrados temos as seguintes respostas:

   a) o espaço amostral deste experimento é:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llllll} (1{,}1), & (1{,}2), & (1{,}3), & (1{,}4), & (1{,}5), & (1{,}6), \\ (2{,}1), & (2{,}2), & (2{,}3), & (2{,}4), & (2{,}5), & (2{,}6), \\ (3{,}1), & (3{,}2), & (3{,}3), & (3{,}4), & (3{,}5), & (3{,}6), \\ (4{,}1), & (4{,}2), & (4{,}3), & (4{,}4), & (4{,}5), & (4{,}6), \\ (5{,}1), & (5{,}2), & (5{,}3), & (5{,}4), & (5{,}5), & (5{,}6), \\ (6{,}1), & (6{,}2), & (6{,}3), & (6{,}4), & (6{,}5), & (6{,}6) \end{array} \right\}$$

   Se somarmos os resultados das duas faces, teremos o seguinte conjunto suporte de X:

$$S_X = \{2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9{,}10{,}11{,}12\}\,.$$

   b) A distribuição de probabilidade de X é dada pelos valores que esta variável pode assumir acompanhada de suas respectivas probabilidades. A probabilidade de X assumir um dado valor é obtida pela soma das probabilidades do evento correspondente de Ω. Por exemplo, se quisermos $p_X(3)$, teremos o evento correspondente, $A = \{\omega ß \Omega | X(\omega) = 3\} = \{(1{,}2),\ (2{,}1)\}$ e a sua probabilidade $P(A) = |A|/|\Omega| = 2/36$. Assim, temos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   Neste caso, podemos construir o seguinte modelo, o que nem sempre é possível:

$$P(X = x) = \frac{\min\left(|x-1|, |13-x|\right)}{36}$$

   c) É discreta, pois o conjunto suporte é um conjunto finito, portanto, contável de valores.

   d) As probabilidades solicitadas são:

      i) $P(X \leq 8) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots + P(X = 8) = (1 + 2 + \cdots + 5)/36 = 26/36 = 72{,}22\%$.

      ii) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + \cdots + P(X = 12) = 30/36 = 83{,}33\%$.

      iii) $P(X < 5) = 1 - P(X \geq 5)\ 1 - 30/36 = 1/6 = 16{,}67\%$.

2) Marcar como verdadeira ou falsa as seguintes afirmativas:

   a) (V) Uma variável aleatória X é uma função do espaço amostral Ω, tal que $X(\omega) = x$, em que $x \in \mathbb{R}$.

   b) (V) O valor $x \in \mathbb{R}$, tal que $x = X(\omega)$ é a imagem da variável aleatória X.

   c) (V) O conjunto imagem de X é chamado de conjunto suporte de X, S_X, e representa um subconjunto dos reais de todos os possíveis valores da função $X(\omega)$ aplicada ao espaço amostral Ω.

   d) (F) São eventos equivalentes dois eventos em espaços amostrais diferentes que quando um ocorre o outro não ocorre simultaneamente.

   e) (F) Se o conjunto suporte de X, S_X, for um conjunto contável, a variável aleatória é contínua.

   f) (V) Se o conjunto suporte de X, S_X, for um conjunto contável, a variável aleatória é discreta.

   g) (V) Se $\sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1$, a variável aleatória X é discreta.

   h) (F) Se $\sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1$, a variável aleatória X é contínua.

3) Temos as seguintes respostas:

   a) A distribuição de probabilidade de X:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Sendo cada probabilidade obtida pela função de probabilidade binomial, que neste caso é:

$$\begin{aligned}p_X(x) =& P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \binom{4}{x}0{,}5^x(1-0{,}5)^{4-x}\\ =& \binom{4}{x}0{,}5^4.\end{aligned}$$

Por exemplo, $P(X = 2)$ é:

$$p_X(2) = \binom{4}{2}0{,}5^4 = 6 \times \frac{1}{2^4} = \frac{6}{16}.$$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 2) = (1 + 4 + 6)/16 = 11/16 = 68{,}75\%$.

c) $P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - 11/16 = 5/16 = 31{,}25\%$.

d) Valor esperado de X:

$$\begin{aligned}E[X] =& \sum_{x=0}^{n} x p_X(x) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + \cdots + 4 \times \frac{1}{16}\\ =& 2.\end{aligned}$$

e) Valor esperado de X^2:

$$\begin{aligned}E[X^2] =& \sum_{x=0}^{n} x^2 p_X(x) = 0^2 \times \frac{1}{16} + 1^2 \times \frac{4}{16} + \cdots + 4^2 \times \frac{1}{16}\\ =& \frac{0 + 4 + 24 + 36 + 16}{16} = \frac{80}{16}\\ =& 5.\end{aligned}$$

4) Esta variável aleatória é uma forma alternativa da geométrica e temos as seguintes respostas:

a) Se fixarmos x repetições, teremos $x - 1$ fracassos independentes antes da ocorrência do x-ésimo sucesso, quando o experimento é interrompido. Logo,

$$P\left(\underbrace{FFF\cdots FS}_{x \text{ repetições}}\right) = \underbrace{P(F) \times P(F) \times \cdots \times P(F)}_{x-1 \text{ fracassos } F} \times P(S) = (1-\theta)^{x-1}\theta.$$

b) O conjunto supor é: $S_X = \{1{,}2{,}3{,}4 \cdots\}$.

c) A variável aleatória X é discreta, pois seu suporte S_X, embora seja um conjunto de infinitos valores, é um conjunto contável, pois podemos fazer uma associação 1 para 1 com o conjunto dos números inteiros.

d) Para mostrar que a soma de todas as probabilidades é igual a 1, vimos em aula que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com razão r, $0 < r < 1$, e primeiro termo a_1 é:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}.$$

No caso queremos somar as probabilidades:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots P(X = n) + \cdots = \theta + (1-\theta)\theta + (1-\theta)^2\theta + \cdots + (1-\theta)^{n-1}\theta + \cdots$$

Portanto, percebemos que se trata da soma de termos de uma progressão geométrica com infinitos termos, com $a_1 = \theta$ e $r = 1 - \theta$. Usando a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, temos, para este caso que:

$$\begin{aligned}S_n =& \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{\theta(1 - (1-\theta)^n)}{1 - (1 - \theta)}\\ =& 1 - (1-\theta)^n.\end{aligned}$$

Logo, a soma de todas as probabilidades é:

$$\sum_{x\in S_X} p_X(x) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1-(1-\theta)^n$$
$$=1,$$

pois $(1-\theta)\in[0{,}1]$ e, portanto, $(1-\theta)^n$ tende a 0 quando n tende para infinito.

5) Podemos utilizar o modelo Poisson quando temos ocorrências (contagem) de algum fenômeno que ocorre aleatoriamente por unidade de área, volume e tempo em uma taxa constante λ. Assim, podemos ter número de defeitos em um processo de produção, cuja taxa de defeito por unidade de temo é constante; número de formigueiros que ocorrem por unidade de área; número de pessoas com aids que chegam em um certo centro médico por unidade de tempo (dia, semana, mês ou ano); entre muitos outros exemplos.

6) Consideremos uma variável aleatória X com suporte $S_X=[0{,}1]$, temos as seguintes respostas:

   a) A função f_X é não negativa para todo $x\in[0{,}1]$ e também

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2\big|_{x=0}^{x=1} = 1^2-0^2=1,$$

   logo f_X é uma função densidade de probabilidade.

   b) As esperanças são:

   $$E[X] = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{2\times 1^3}{3}-0$$
   $$=\frac{2}{3}$$

   e

   $$E[X^2] = \int_0^1 x^2f_X(x)dx = \int_0^1 2x^3dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1^4}{2}-0$$
   $$=\frac{1}{2}.$$

   c) A função de distribuição é:

   $$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x 2tdt = t^2\big|_{t=0}^{t=x} = x^2-0$$
   $$=x^2.$$

   d) A probabilidade desejada pode ser computado de dois modos. O primeiro é:

   $$P(0{,}2<X\le 0{,}5) = \int_{0,2}^{,5} f_X(x)dx = \int_{0,2}^{0,5} 2xdx = x^2\big|_{x=0,2}^{x=0,5} = 0{,}5^2-0{,}2^2$$
   $$=0{,}21 = 21\%.$$

   A segunda forma é usando o F_X. Assim, temos

   $$P(0{,}2<X\le 0{,}5) = F_X(0{,}5)-F_X(0{,}2) = 0{,}5^2-0{,}2^2$$
   $$=0{,}21=21\%.$$

   e) A variável aleatória X deste exemplo é contínua, pois seu suporte é um intervalo não contável dos reais, $S_X=[0{,}1]$ e $P(X=x)=0$ para todo $x\in S_X$, pois $P(x\le X\le x)=F_X(x)-F_X(x)=0$.

7) Supondo que que $F_X(x)=x^2$ para $0\le x\le 1$, então temos:

   a) $P(X<3)=F_X(3)=1$.
   b) $P(1/4<X<1/2)=F_X(1/2)-F_X(1/4)=(1/2)^2-(1/4)^2=3/16$.
   c) $P(2/5<X<4/5)=F_X(4/5)-F_X(2/5)=(4/5)^2-(2/5)^2=12/25$.
   d) $P(X<0)=F_X(0)=0$.
   e) $P(X<1)=F_X(1)=1$.

f) $P(X \leq -3) = F_X(-3) = 0$, pois $S_X = [0,1]$.

8) Temos as seguintes respostas:

a) Uma variável aleatória é discreta se o seu suporte S_X é um conjunto de valores contável finito ou infinito e se para todo $x \in S_X$, temos $p_X(x) > 0$, com $\sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1$. Já uma variável aleatória X é contínua se e somente se $p_X(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) A função de probabilidade p_X é uma função de S_X para [0,1] que atribui probabilidades a cada valor da variável aleatória X discreta e está associada a variáveis aleatórias discretas. Já a função densidade f_X não é uma função que atribuí probabilidades as correspondentes valores x da variável aleatória contínua X, mas tem a seguintes propriedades: a) é não negativa para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. A partir dela computamos probabilidades para variáveis aleatórias contínuas por $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$.

c) Por que se atribuirmos qualquer valor $\epsilon > 0$, por menor que seja, a soma das probabilidades associadas a todos os valores $x \in S_X$, que é um conjunto não contável, irá divergir e resultará em ∞. Logo, não podemos atribuir probabilidades a um determinado valor x se ele é um valor de uma variável aleatória contínua X, ou seja, que assume valores em um conjunto suporte não contável. Isso, no entanto, não indica que o evento $\{X = x\}$ seja impossível.

d) Sim, esta é um das definições apresentadas. Se no entanto, $P(X = x) > 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$, então a variável aleatória X não será considerada contínua. Neste caso ela é considerada mista, ou seja, para um subconjunto de valores do conjunto suporte $P(X = x) = 0$ e para um subconjunto contável $P(X = x) > 0$.

e) Sim, neste caso X é discreta, pois seu conjunto suporte é contável (no caso finito com dois valores possíveis apenas). Não importa se estes valores sejam reais ou inteiros (mais comum), o que importa é que S_X seja contável ou não contável. Além disso, como X assume apenas dois valores, então X é uma variável Bernoulli. É natural codificarmos X com os valores 0 e 1, sendo 0 a codificação para o valor 0,25 e 1, para o valor 2,34, o que a torna (a variável aleatória) mais prontamente identificável como sendo Bernoulli.